CH 8 IDENTITE DE BEZOUT

EX23 :

1. $a\wedge n=1\Rightarrow a\wedge pqu=1\Rightarrow a\wedge p=1$; $a\wedge q=1$ et $a\wedge u=1$

$a\wedge p=1$ et p premier alors d'apré th de Fermat $a^{p-1}\equiv 1(p)$

$a\wedge q=1$ et q premier alors d'apré th de Fermat $a^{q-1}\equiv 1(q)$

$a\wedge u=1$ et u premier alors d'apré th de Fermat $a^{u-1}\equiv 1(u)$

On a p-1 divise n-1 donc $n-1=k.(p-1)\Rightarrow a^{n-1}=(a^{p-1})^k\equiv 1^k\ (p)\Rightarrow a^{n-1}\equiv 1(p)$

On a q-1 divise n-1 donc $n-1=k.(q-1)\Rightarrow a^{n-1}=(a^{q-1})^k\equiv 1^k\ (q)\Rightarrow a^{n-1}\equiv 1(q)$

On a u-1 divise n-1 donc $n-1=k.(u-1)\Rightarrow a^{n-1}=(a^{u-1})^k\equiv 1^k\ (u)\Rightarrow a^{n-1}\equiv 1(u)$

2. On a $a^{n-1}-1\equiv 0(p)$; $a^{n-1}-1\equiv 0(q)$ et $p\wedge q=1$ Alors $a^{n-1}-1\equiv 0(pq)$

On a $a^{n-1}-1\equiv 0(pq)$; $a^{n-1}-1\equiv 0(u)$ et $pq\wedge n=1$ Alors $a^{n-1}-1\equiv 0(pqu)$ donc $a^{n-1}-1\equiv 0(n)$

3. $561=3x11x17$ On pose n=561 ; p=3 ;q=11 ; u=17 et a=224

Alors d'après les questions 1. et 2. on peut conclure que $224^{560}\equiv 1(561)$

4. $1729=7x13x19$ on pose n=1729 ; p=7 ;q=13 ; u=19 et a=561

Alors d'après les questions 1. et 2. on peut conclure que $561^{1728}\equiv 1(1729)$

EX 24 :

1.

a/ On a $(a+b)\wedge ab=p\Rightarrow$ p divise ab et p divise a+b

Supposons que p ne divise pas a ; comme p est premier alors $p\wedge a=1$

On a $p \mid ab$ et $p\wedge a=1$ donc p divise b et comme $p \mid a+b$ Alors $p \mid a$ Absurde

Donc p divise a et comme p divise a+b Alors p divise aussi b

donc p est un diviseur commun de a et b.

b/ Soit $d=a\wedge b$

On a p est un diviseur commun de a et b Donc p divise d

$d=a\wedge b\Rightarrow$ d divise a et b $\Rightarrow$ d divise a+b et ab $\Rightarrow$ d divise p

On a donc d divise p et p divise d Donc p=d Donc $p=a\wedge b$

2. a/ $\begin{cases} a\wedge b=5 \\ a\vee b=170 \end{cases}\Rightarrow$ a et b sont des multiples de 5 et $axb=5x170=5x(5x2x17)$

Et comme a≤b Alors a=5 et b=5x2x17=170 ou a=5x2 et b=5x17=85

b/ 5 étant un nombre premier alors d'apres 1. $(a+b)\hat{}a.b=a\hat{}b$ Alors

$$\begin{cases} (a+b)\wedge ab=5 \\ a\vee b=170 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\wedge b=5 \\ a\vee b=170 \end{cases}$$

Alors a=5 et b=170 ou a=10 et b=85 (d'après 2. a/)

Qarray.tn -Aqra Blech- Qarray.tn